

# [ 지 수 와 로 그 ]

## [1] 지 수

### 1. 지 수 법 칙

$$(1) a^0 = 1$$

$$(2) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(3) a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(4) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(5) (ab)^n = a^n b^n$$

$$(6) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (\text{단, } b \neq 0)$$

$$(7) a^m \div b^n = a^{m-n}$$

$$(8) \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$(9) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(10) \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$(11) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{mn}{a}$$

$$(12) a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

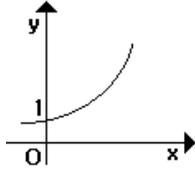
## 2. 지수함수

### 1. 지수함수

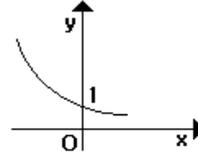
(1)  $y=a^x$  ( $a>0, a\neq 1$ ) 을  $a$  를 밑으로 하는 지수함수

(2) 지수함수  $y=a^x$  ( $a>0, a\neq 1$ ) 의 그래프의 성질

$$a>1$$



$$0<a<1$$



### 2. 지수의 대소관계

(1)  $0<a<1$  일 때  $m>n \Leftrightarrow a^m < a^n$

(2)  $a>1$  일 때  $m>n \Leftrightarrow a^m > a^n$

### 3. 지수함수의 최대·최소 구하기

(1) 지수의 대소 관계를 이용한다.

(2)  $a^x=t$  ( $t>0$ ) 로 놓고  $t$  의 함수로 나타낸다.

(3) 범위가 주어질 때 그래프를 이용한다.

## 3. 지수방정식과 지수부등식

### 1. 지수방정식

(1) 밑이 같을 때, 즉  $a^{f(x)}=a^{g(x)}$  의 꼴일 때

㉠  $a=1$  인 경우는 모든  $x$  에 대하여 성립한다.

㉡  $a\neq 1$  인 경우는 방정식  $f(x)=g(x)$  을 푼다.

(2)  $a^x$  를 포함할 때,  $a^x=X$  ( $X>0$ ) 로 치환하여 푼다.

### 2. 지수부등식

(1) 밑이 같을 때, 즉  $a^{f(x)}>a^{g(x)}$  의 꼴일 때

㉠  $a>1$  인 경우는  $f(x)>g(x)$  를 푼다.

㉡  $0<a<1$  인 경우는  $f(x)<g(x)$  를 푼다.

(2)  $a^x$  를 포함할 때,  $a^x=X$  ( $X>0$ ) 로 치환하여 푼다.

## 지수 문제

1) 다음 식을 간단히 하여라.

(1)  $(ab^2) \times \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^3$

(2)  ${}^3\sqrt{4^2} \div {}^3\sqrt{24} \times {}^3\sqrt{18^2}$

(3)  ${}^3\sqrt{\frac{4\sqrt{a}}{5\sqrt{a}}} \times {}^4\sqrt{\frac{5\sqrt{a}}{3\sqrt{a}}} \times {}^5\sqrt{\frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{a}}}$  (단,  $a > 0$ )

2) 다음 수의 대소를 비교하여라.

(1)  $\sqrt{2}, {}^3\sqrt{4}, {}^4\sqrt{6}, {}^6\sqrt{10}$

(2)  ${}^3\sqrt{a} + {}^3\sqrt{b}, {}^3\sqrt{a+b}$  ( $a \geq 0, b \geq 0$ )

3) 다음 식을 간단히 하여라.

(1)  $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right)$

(2)  $\left(x^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{a}{c-a}} \cdot \left(x^{\frac{b}{b-c}}\right)^{\frac{b}{a-b}} \cdot \left(x^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{c}{b-c}}$

4) 다음 물음에 답하여라.

(1)  $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$  일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단,  $x > 0$ )

(㉠)  $x + \frac{1}{x}$

(㉡)  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(㉢)  $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(2)  $x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$  일 때,  $2x^3 + 6x$ 의 값을 구하여라.

(3)  $3^x = 2$  일 때,  $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x}$ 의 값을 구하여라.

(4)  $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$  일 때,  $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값을 구하여라.

(5)  $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$  일 때,  $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ 의 값을 구하여라.

(6)  $a > 1, \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = 1$  일 때,  $a^{2x}$ 의 값을 구하여라.

5) 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1)  $y = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x})$

(2)  $y = 2^{|x|} - 1$

6) 다음 크기를 비교하여라.

(1)  $\sqrt{0.3^3}$ ,  $\sqrt[3]{0.3^4}$ ,  $\sqrt[4]{0.3^5}$

(2)  ${}^{n-1}\sqrt{a^n}$ ,  ${}^n\sqrt{a^{n+1}}$ ,  ${}^n\sqrt{a^{n-1}}$  (단,  $a > 1$ ,  $a \neq 1$  이고,  $n \geq 2$  인 자연수)

7)  $-1 \leq x \leq 1$  에서 함수  $y = 9^x - 3^{x+1}$  의 최대값을  $M$ , 최소값을  $m$  이라 할 때,  $M - m$  의 값을 구하여라.

8)  $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^{x+1} + a^{-x}}$  이고,  $f(p) = \frac{1}{2}$ ,  $f(q) = \frac{1}{3}$  일 때,  $f(p+q)$  의 값을 구하여라. (단,  $a > 0$ )

9) 다음 지수방정식을 풀어라.

(1)  $x^{3x+2} = x^{2x}$

(2)  $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$

(3)  $4^x + 4^{-x} = 2^x + 2^{-x}$

(4)  $(\sqrt{4 + \sqrt{15}})^x + (\sqrt{4 - \sqrt{15}})^x = 8$

10) 다음 지수부등식을 풀어라.

(1)  $4 \cdot 3^{x+1} > 9^x + 27$

(2)  $a^{2x} + 1 < a^{x+3} + a^{x-3}$  (단,  $0 < a < 1$ )

(3)  $x^{3x+1} > x^{x+5}$

(4)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \sqrt{3^3} < \left(\frac{1}{9}\right)^{(x-1)}$

11) 연립방정식  $\begin{cases} 2^{x+3} + 9^{y+1} = 35 \\ 8^{\frac{x}{3}} + 3^{2y+1} = 5 \end{cases}$  를 풀어라.

12) 이차부등식  $3x^2 - (3^a + 3)x + (3^a + 3) > 0$  이 모든 실수  $x$  에 관하여 성립하도록 실수  $a$  의 값의 범위는 ?

13)  $f(x) = \frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a^x + b^x}$  이고,  $a, b$  는 모두 양수이며  $x > y$  일 때,  $f(x)$  와  $f(y)$  의 대수를 비교하여라

## 지수 문제풀이

1) (1)  $(ab^2) \times \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^3 = a b^2 \times a^9 b^{-6} = a^{1+9} \cdot b^{2-6} = a^{10} b^{-4} = \frac{a^{10}}{b^4}$

(2)  $3\sqrt{4^2} \div 3\sqrt{24} \times 3\sqrt{18^2} = 3\sqrt{4^2} \times \frac{1}{3\sqrt{24}} \times 3\sqrt{18^2} = 3\sqrt{\frac{4^2 \times 18^2}{24}} = 3\sqrt{(2 \cdot 3)^3} = 6$

(3)  $3\sqrt{\frac{4\sqrt{a}}{5\sqrt{a}}} \times 4\sqrt{\frac{5\sqrt{a}}{3\sqrt{a}}} \times 5\sqrt{\frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{a}}} = \frac{12\sqrt{a}}{15\sqrt{a}} \times \frac{20\sqrt{a}}{12\sqrt{a}} \times \frac{15\sqrt{a}}{20\sqrt{a}} = 1$

2) (1)  $\sqrt{2}$ ,  $3\sqrt{4}$ ,  $4\sqrt{6}$ ,  $6\sqrt{10}$  을  $12\sqrt{a}$  의 꼴로 고치면

$$\sqrt{2} = 12\sqrt{2^6} = 12\sqrt{64}, \quad 3\sqrt{4} = 12\sqrt{4^4} = 12\sqrt{256}$$

$$4\sqrt{6} = 12\sqrt{6^3} = 12\sqrt{216}, \quad 6\sqrt{10} = 12\sqrt{10^2} = 12\sqrt{100}$$

따라서,  $12\sqrt{256} > 12\sqrt{216} > 12\sqrt{100} > 12\sqrt{64} \quad \therefore 3\sqrt{4} > 4\sqrt{6} > 6\sqrt{10} > \sqrt{2}$

(2)  $3\sqrt{a} = A$ ,  $3\sqrt{b} = B$  라고 하면,  $3\sqrt{a} + 3\sqrt{b} = A + B$  이고,

$$(3\sqrt{a})^3 = A^3, \quad (3\sqrt{b})^3 = B^3 \quad \text{이므로} \quad 3\sqrt{a+b} = 3\sqrt{A^3+B^3}$$

두 식  $A+B$   $3\sqrt{A^3+B^3}$  을 세제곱한 후  $(A+B)^3$  에서  $(3\sqrt{A^3+B^3})^3$  을 빼면,

$$(A+B)^3 - (3\sqrt{A^3+B^3})^3 = 3AB(A+B) \geq 0 \quad \text{등호는 } AB=0 \text{ 일 때, 즉 } ab=0 \text{ 일 때 성립 한다.}$$

$$\text{그러므로 } (A+B)^3 \geq (3\sqrt{A^3+B^3})^3 \quad \text{즉, } A+B \geq 3\sqrt{A^3+B^3}$$

따라서,  $3\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \geq 3\sqrt{a+b}$  (단, 등호는  $ab=0$  일 때 성립)

3) (1) (준식)  $= \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) = a - b$

(2)  $\left(x^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{a}{c-a}} \cdot \left(x^{\frac{b}{b-c}}\right)^{\frac{b}{a-b}} \cdot \left(x^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{c}{b-c}} = x^p$  라 하면

$$p = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{a}{c-a} + \frac{b}{b-c} \cdot \frac{b}{a-b} + \frac{c}{c-a} \cdot \frac{c}{b-c} = \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1$$

$$\therefore (\text{준식}) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

4) (1) (㉠)  $x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$

(㉡)  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 4 = 4 + 4 = 8 \quad x > 0 \quad \text{이므로} \quad \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2}$

(㉢)  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 6^2 - 2 = 34$

(2)  $2x^3 + 6x = 2x(x^2 + 3) = 2\left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)\left(2^{\frac{2}{3}} - 2 + 2^{-\frac{2}{3}} + 3\right)$

$$= 2\left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)\left(2^{\frac{2}{3}} + 1 + 2^{-\frac{2}{3}}\right) = 2\left\{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3\right\} = 2\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 3$$

(3)  $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x} = (3^{-2})^{-x} = 3^{2x} = (3^x)^2 = 2^2 = 4$

$$(4) \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = a^{2x-1} + a^{-2x} = (\sqrt{2}-1) - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}-1 - 1 + \sqrt{2}+1 = 2\sqrt{2}-1$$

$$(5) x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^3 - 3(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 27 - 9 = 18$$

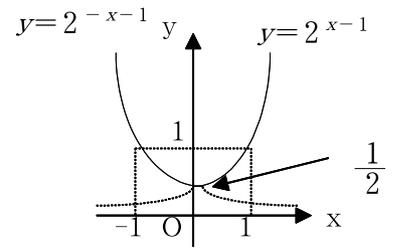
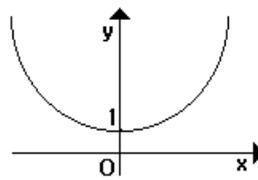
$$(6) \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{(a^x + a^{-x})^3 - 3(a^x + a^{-x})}{a^x + a^{-x}} = (a^x + a^{-x})^2 - 3 = 1$$

$$\therefore a^{2x} + a^{-2x} = 2, \quad (a^{2x})^2 - 2a^{2x} + 1 = 0, \quad (a^{2x}-1)^2 = 0 \quad \therefore a^{2x} = 1$$

5) (1)  $y=2^x$ 의 그래프와  $y=2^{-x}$ 의 그래프에서 각각의  $y$ 의 값을 더해 2로 나눈 것을  $y$ 의 값으로 한다. 따라서, 주어진 함수의 그래프는 다음과 같다.

$$(2) x \geq 0 \text{ 일 때, } y = 2^{x-1}$$

$$x < 0 \text{ 일 때, } y = 2^{-x-1}$$



$$6) (1) \sqrt{0.3^3} = 0.3^{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt[3]{0.3^4} = 0.3^{\frac{4}{3}}, \quad \sqrt[4]{0.3^5} = 0.3^{\frac{5}{4}}$$

$0 < 0.3 < 1$  이므로  $y = 0.3^x$ 은  $x$ 가 증가할 때  $y$ 는 감소한다.

$$\text{따라서, } \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2} \text{ 이므로 } 0.3^{\frac{5}{4}} > 0.3^{\frac{4}{3}} > 0.3^{\frac{3}{2}} \quad \therefore \sqrt[4]{0.3^5} > \sqrt[3]{0.3^4} > \sqrt{0.3^3}$$

$$(2) n-1\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{n-1}}, \quad n\sqrt{a^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{n}}, \quad n\sqrt{a^{n-1}} = a^{\frac{n-1}{n}}$$

$$n \geq 2 \text{ 인 자연수이므로 } \frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > 0, \quad \frac{n+1}{n} - \frac{n-1}{n} = \frac{2}{n} > 0$$

$$\therefore \frac{n}{n-1} > \frac{n+1}{n} > \frac{n-1}{n}$$

$$\text{따라서, } a > 1 \text{ 일 때, } a^{\frac{n}{n-1}} > a^{\frac{n+1}{n}} > a^{\frac{n-1}{n}}, \quad \text{즉 } n-1\sqrt{a^n} > n\sqrt{a^{n+1}} > n\sqrt{a^{n-1}}$$

7)  $y = 9^x - 3^{x+1} = (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x$ 에서  $3^x = t$ 로 놓으면  $y = t^2 - 3t$ 이므로  $t$ 에 관한 이차함수

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ 이므로, } \frac{1}{3} \leq t \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$y = t^2 - 3t = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$\textcircled{1} \text{의 범위에서 최대값 } M=0, \text{ 최소값 } m = -\frac{9}{4} \quad \therefore M-m = \frac{9}{4}$$

$$8) f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} \text{ 이므로, } (a^{2x} + 1)f(x) = a^{2x} - 1 \text{ 에서 } a^{2x} = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$$

$$\therefore a^{2p} = \frac{1 + f(p)}{1 - f(p)} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3, \quad a^{2q} = \frac{1 + f(q)}{1 - f(q)} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

$$\text{따라서, } f(p+q) = \frac{a^{2(p+q)} - 1}{a^{2(p+q)} + 1} = \frac{a^{2p} \cdot a^{2q} - 1}{a^{2p} \cdot a^{2q} + 1} = \frac{3 \times 2 - 1}{3 \times 2 + 1} = \frac{5}{7}$$

9) (1)  $x^{3x+2} = x^{2x}$  에서

i)  $x \neq 1$  일 때 ;  $3x+2=2x \quad \therefore x=-2$

ii)  $x=1$  일 때 ; 주어진 식은 성립한다.

따라서,  $x=-2$  또는  $x=1$

(2)  $3^x = X$  로 놓으면 ( $X > 0$ )

주어진 식에서  $X^2 + 6X - 27 = 0, (X+9)(X-3) = 0$

$X > 0$  이므로  $X=3$ , 즉  $3^x = 3^1 \quad \therefore x=1$

(3)  $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$  이므로 주어진 방정식에서  $2^x + 2^{-x} = t$  로 놓으면,  $t \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$

따라서, 주어진 방정식은  $t^2 - 2 = t, t^2 - t - 2 = 0, (t-2)(t+1) = 0$

$t \geq 2$  이므로  $t=2$ , 즉  $2^x + 2^{-x} = 2$

$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 = 0, (2^x - 1)^2 = 0, 2^x = 1, \therefore x=0$

(4)  $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x = u, (\sqrt{4-\sqrt{15}})^x = v$  로 놓으면 ,

$uv = (\sqrt{4+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{15}})^x = 1, u+v=8$

따라서,  $u, v$  는 방정식  $t^2 - 8t + 1 = 0$  의 두 근이다.

$\therefore t = 4 \pm \sqrt{15}$  에서  $\begin{cases} u = 4 + \sqrt{15}, v = 4 - \sqrt{15} \\ u = 4 - \sqrt{15}, v = 4 + \sqrt{15} \end{cases} \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=-2$

10) (1)  $4 \cdot 3^{x+1} > 9^x + 27$  을 정리하면,  $(3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 < 0$

$3^x = X$  놓으면,  $X^2 - 12X + 27 < 0, (X-3)(X-9) < 0$

$\therefore 3 < X < 9, 3^1 < 3^x < 3^2 \quad \therefore 1 < x < 2$

(2)  $a^x = X$  로 놓으면,  $X^2 + 1 < a^3 X + \frac{1}{a^3} X$

$X^2 - \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)X + 1 < 0, (X - a^3)\left(X - \frac{1}{a^3}\right) < 0$

$0 < a < 1$  이므로  $a^3 < X < \frac{1}{a^3}$ , 즉  $a^3 < a^x < a^{-3}$       밑  $a$  가 1보다 작으므로  $\therefore -3 < x < 3$

(3)  $x > 1$  일 때,  $3x+1 > x+5 \quad \therefore x > 2$

이것은  $x > 1$  을 만족하므로 해이다.

$0 < x < 1$  일 때,  $3x+1 < x+5 \quad \therefore x < 2$

$0 < x < 1$  의 범위에서  $x < 2$  을 만족하는 것은  $0 < x < 1$

$\therefore 0 < x < 1$  또는  $x > 2$

(4) 밑을 3 으로 고치면,  $3^{-x} \leq 3^{\frac{3}{2}} < (3^{-2})^{(x-1)}$ , 즉  $3^{-x} \leq 3^{\frac{3}{2}} < 3^{2-2x}$

밑이 1 보다 크므로,  $-x \leq \frac{3}{2} < 2-2x \quad \therefore -\frac{3}{2} \leq x < \frac{1}{4}$

11) (준식) =  $\begin{cases} 8 \cdot 2^x + 9 \cdot 9^y = 35 \\ 2^x + 3 \cdot 9^y = 5 \end{cases}$  에서  $2^x = X$ ,  $9^y = Y$  로 놓으면,

$$\begin{cases} 8X + 9Y = 35 & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ X + 3Y = 5 & \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 3$  하면,  $5X = 20$ ,  $X = 4$ ,  $Y = \frac{1}{3}$  즉,  $2^x = 4$ ,  $9^y = \frac{1}{3}$  에서  $2^x = 2^2$ ,  $3^{2y} = 3^{-1}$

$$\therefore x = 2, \quad y = -\frac{1}{2}$$

12) 주어진 이차부등식이 모든 실수  $x$  에 관하여 성립하려면

$3x^2 - (3^a + 3)x + (3^a + 3) = 0$  의 판별식을  $D$  라 할 때,  $D < 0$  이어야 한다.

그러므로  $D = (3^a + 3)^2 - 4 \cdot 3(3^a + 3) < 0$  에서  $3^a = X$  라 하면

$$(X + 3)^2 - 4 \cdot 3(X + 3) < 0, \quad X^2 - 6X - 27 < 0, \quad (X + 3)(X - 9) < 0$$

이 때,  $X + 3 > 0$  이므로  $0 < X < 9$  즉,  $0 < 3^a < 3^2$  이므로  $a < 2$

$$\begin{aligned} 13) f(x) - f(y) &= \frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a^x + b^x} - \frac{a^{y+1} + b^{y+1}}{a^y + b^y} \\ &= \frac{(a^{x+1} + b^{x+1})(a^y + b^y) - (a^x + b^x)(a^{y+1} + b^{y+1})}{(a^x + b^x)(a^y + b^y)} = \frac{(a - b)(a^{x-y} - b^{x-y})a^y b^y}{(a^x + b^x)(a^y + b^y)} \end{aligned}$$

i)  $a \geq b$  일 때,  $x > y$  이므로  $a^{x-y} - b^{x-y} \geq 0$

$\therefore f(x) \geq f(y)$  (단,  $a = b$  일 때, 등호 성립)

ii)  $a < b$  일 때,  $a - b < 0$  이고  $a^{x-y} - b^{x-y} < 0$

$\therefore f(x) > f(y)$

i), ii) 에서,  $f(x) \geq f(y)$

## [2] 로그

### 1. 로그

#### 1. 로그의 정의

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b \quad (a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0)$$

#### 2. $\log_a b$ 가 정의되기 위한 조건

- (1) 밑  $a$  는 1 이 아닌 양수이어야 한다. 즉,  $a > 0, a \neq 1$
- (2) 진수  $b$  는 양수이어야 한다. 즉,  $b > 0$

#### 3. 로그의 기본 성질

- (1)  $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$
- (2)  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- (3)  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- (4)  $\log_a x^n = n \log_a x$

#### 4. 로그의 밑의 변환

- (1)  $a > 0, b > 0, c > 0$  이고  $a \neq 1, c \neq 1$  일 때

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

- (2)  $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$  ( $m, n$  은 실수,  $m \neq 0$ )

## 2. 상용로그

### 1. 상용로그의 뜻

10 을 밑으로 하는 로그 ( $\log N$ )

### 2. 지표와 가수

(1)  $\log N = n + a$  ( $n$  은 정수,  $0 \leq a < 1$ ) 일 때,  $\log N$ 의 지표는  $n$ , 가수는  $a$  이다.

### (2) 지표의 성질

①  $N > 1$  일 때,  $\log N$ 에서  $N$ 의 정수 부분이  $n$  자리이면 지표는  $n-1$  이다.

②  $0 < N < 1$  일 때,  $\log N$ 에서  $N$ 이 소수점아래  $n$  자리에서 처음으로 0 이 아닌 수가 나오면  
지표는  $\bar{n}$  ( $= -n$ ) 이다.

### (3) 가수의 성질

진수의 숫자의 배열이 같고 소수점의 위치만 다른 수들의 상용로그의 가수는 모두 같다.

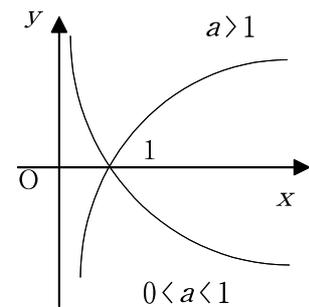
## 3. 로그함수

(1)  $y = \log_a x$  를  $a$  를 밑으로 하는  $x$  의 로그함수

(2) 로그함수  $y = \log_a x$  는 지수함수  $y = a^x$  의 역함수이다.

(3) 로그함수  $y = \log_a x$  의 그래프

- 지수함수  $y = a^x$  의 그래프와 직선  $y = x$  에 대하여 대칭이다.



## 4. 로그방정식과 로그부등식

### 1. 로그방정식

- 지수에 로그가 있을 경우 양변에 로그를 취한다.

-  $\log_a x = t$  로 놓고,  $t$  에 대한 방정식으로 변형하여 푼다.

### 2. 로그부등식

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$  에서

①  $a > 1$  일 때 ;  $f(x) > g(x) > 0$

②  $0 < a < 1$  일 때 ;  $0 < f(x) < g(x)$

## 로그 문제

1) 다음  $x$  의 값을 구하여라.

(1)  $\log_{\frac{2}{3}}(\log_5 5\sqrt{5}) = x$

(2)  $9^{\log_9 4}$

2)  $x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ,  $y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$  일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$\log_3(x^3 - x^2y - xy^2 + y^3)$$

3)  $x$  의 모든 실수값에 대하여  $\log_{p-1}(x^2 - 2px + 3p)$  가 의미를 가지기 위한 실수  $p$  의 값의 범위를 구하여라.

4)  $\frac{1}{2} \log_2(2x + 2\sqrt{x^2 - 1}) + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$  을 간단히 하여라. (단,  $x > 1$ )

5)  $(\log_6 3)^3 + \frac{1}{2} \log_6 27 \cdot \log_6 4 + (\log_6 2)^3$  을 간단히 하여라.

6)  $a = \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 4}$  일 때,  $16^a$  의 값을 구하여라.

7)  $a = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{3}\right)$ ,  $b = \log_{10} \left(1 + \frac{2}{3}\right)$  일 때  $\log_{10} 2$ ,  $\log_{10} 3$  을  $a$ ,  $b$  로 나타내어라.

8)  $a^x = b^y = c^z$  이고  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$  일 때,  $a, b, c$  사이의 관계를 구하여라.

(단,  $x, y, z$  는 0 이 아닌 실수이고,  $a, b, c$  는 1이 아닌 양수)

9)  $\log_a b + \log_b a = \frac{5}{2}$  일 때,  $\frac{a^3 + b^3}{ab + a^2b^2}$  의 값을 구하여라.

10) 양의 유리수  $x, y, z$  가  $\log_2 x + 2\log_4 y + 3\log_8 z = 1$  을 만족시킬 때,  $\{(2^x)^y\}^z$  의 값을 구하여라.

11)  $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$  일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1)  $18^{10}$  은 몇 자리의 수인가?

(2)  $0.3^{10}$  은 소수 몇 째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 숫자가 나타나는가?

12) 상용로그의 지표가 4 인 자연수 전체의 개수를  $x$ , 역수의 상용로그의 지표가  $\bar{2}$  인 자연수 전체의 개수를  $y$  라 할 때,  $\log x - \log y$  의 값을 구하여라.

13)  $10 \leq x < 100$  인  $x$  에 대하여  $\log \frac{1}{x}$  의 가수와  $\log x^2$  의 가수가 같을 때,  $x$  의 값을 구하여라.

14) 세 자리의 정수  $A, B$  에서  $B$  는 900 보다 크고,  $B$  의 상용로그의 가수는  $A$  의 상용로그의 가수의 2배 라고 할 때,  $A, B$  를 각각 구하여라.

15) 양수  $x, y$  에 대하여  $x+y$  의 상용로그의 지표가 8,  $xy$  의 상용로그의 지표가 3일 때,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  의 값의 범위를 구하여라.

16) 다음 로그표를 이용하여  $\frac{\sqrt{252} \times 26 \times 2.1}{5 \times 2.45 \times \sqrt[3]{23.2}}$  의 값을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	비례부분								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3902	.3927	.3945	.3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133	2	3	5	7	8	10	12	14	15
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14

17) 함수  $y = |\log_2 x^2|$  의 그래프를 그리고 정의역과 치역, 점근선을 구하여라.

18) 다음 함수의 역함수를 구하여라.

(1)  $y = 2^{x+1} - 1$

(2)  $y = \frac{1}{2}(2^x - 2^{-x})$

(3)  $y = \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1)$

19)  $2x + y = 10$  일 때,  $\log_{10} x + \log_{10} y$  의 최대값을 구하여라.

20)  $a > 1, b > 1, c > 1$  일 때,  $p = \log_a b + 2 \log_b c + 4 \log_c a$  의 최소값을 구하여라.

21)  $1 < x < a < 2$  일 때,  $\log_a x^2, \log_a 2x, \log_a x, (\log_a x)^2$  의 대소를 비교하여라.

22)  $x \geq 10, y \geq 10, xy = 1000$  일 때,  $\log x \log y$  의 최대값, 최소값을 구하여라.

23) 다음 방정식을 풀어라.

(1)  $\log_{10} x - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10}(x-1)$

(2)  $(\log_3 27x)(\log_3 3x) = 3$

(3)  $x^{3 \log x} = 100x^5$

(4) 
$$\begin{cases} \log_8 xy^3 = 3 \\ \log_2 x^2y = 13 \end{cases}$$

(5)  $(\log y)^2 + (2^{x+1} + 2^{-x+1}) \cdot \log y + (2^{2x+1} + 2^{-2x+1}) = 0$  (단,  $x, y$  는 실수)

24) 방정식  $\log(4 - 2x^2) = \log(a - x) + 1$  이 근을 가지도록 하는 양의 정수  $a$  와 그 때의 근을 구하여라.

25) 방정식  $a^{\log x} \cdot x^{\log a} - 2(a^{\log x} + x^{\log a}) + 3 = 0$  을 풀어라, (단,  $a > 0, a \neq 1$ )

26) 다음 부등식을 풀어라

(1)  $x^{\log x} > \frac{1000}{x^2}$

(2)  $\log_a(1-x) \leq \log_{a^2}(2x-1)$  (단,  $0 < a < 1$ )

27) 부등식  $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{4}}(2x-1)$  을 풀어라.

## 로그 문제풀이

1) (1)  $\log_5 5\sqrt{5} = a$  로 놓으면,  $5^a = 5\sqrt{5} = 5^{\frac{3}{2}} \therefore a = \frac{3}{2}$

$$\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = x \text{ 에서 } \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \therefore x = -1$$

(2)  $9^{\log_9 4} = x$  라 하면, 로그의 정의에 의하여  $\log_9 4 = \log_9 x \therefore x = 4$

2)  $x + y = \sqrt{3}$ ,  $xy = \frac{1}{2}$  이므로

$$\log_3 (x^3 - x^2y - xy^2 + y^3) = \log_3 \{ (x+y)^3 - 4xy(x+y) \} = \log_3 (3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) = \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

3) 밑의 조건에서  $p-1 > 0$  이고  $p-1 \neq 1 \therefore 1 < p < 2$  또는  $p > 2 \dots \textcircled{A}$

또 진수의 조건에서  $x^2 - 2px + 3p > 0$  이지만,  $x$  의 모든 실수값에 대하여 성립하여야 하므로  $D < 0$  이어야 한다.  $\therefore \frac{D}{4} = (-p)^2 - 3p = p^2 - 3p < 0 \therefore 0 < p < 3 \dots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}$ ,  $\textcircled{B}$  에서  $1 < p < 2$  또는  $2 < p < 3$

4) (준식)  $= \frac{1}{2} \{ \log_2 (2x + 2\sqrt{x^2 - 1}) + 2\log_2 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \}$

$$= \frac{1}{2} \{ \log_2 (2x + 2\sqrt{x^2 - 1}) + \log_2 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2 \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \log_2 (2x + 2\sqrt{x^2 - 1}) + \log_2 (2x - 2\sqrt{x^2 - 1}) \}$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 (2x + 2\sqrt{x^2 - 1})(2x - 2\sqrt{x^2 - 1})$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \{ 4x^2 - 4(x^2 - 1) \} = \frac{1}{2} \log_2 4 = 1$$

5)  $\log_6 27 \cdot \log_6 4 = 6\log_6 3 \cdot \log_6 2$  이므로

$$(\text{준식}) = (\log_6 3)^3 + 3\log_6 3 \cdot \log_6 2 + (\log_6 2)^3$$

$$= (\log_6 3)^3 + 3\log_6 3 \cdot \log_6 2 + (\log_6 2)^3$$

$$= (\log_6 3 + \log_6 2)^3 = 1$$

6)  $a = \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 4} = \log_4 6$  이므로  $4^a = 6$ ,  $(4^a)^2 = 6^2 \therefore 16^a = 36$

7)  $\log_{10} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \log_{10} \frac{4}{3} = \log_{10} 4 - \log_{10} 3 = 2\log_{10} 2 - \log_{10} 3$

$$\therefore a = 2\log_{10} 2 - \log_{10} 3 \dots \textcircled{A}$$

$$\log_{10} \left(1 + \frac{2}{3}\right) = \log_{10} \frac{5}{3} = \log_{10} 5 - \log_{10} 3 = (1 - \log_{10} 2) - \log_{10} 3 = 1 - \log_{10} 2 - \log_{10} 3$$

$$\therefore b = 1 - \log_{10} 2 - \log_{10} 3 \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} - \textcircled{B}$  하면,  $a - b = 3\log_{10} 2 - 1 \therefore \log_{10} 2 = \frac{a - b + 1}{3}$

$\textcircled{A} + \textcircled{B} \times 2$  하면,  $a + 2b = 2 - 3\log_{10} 3 \therefore \log_{10} 3 = \frac{-a - 2b + 2}{3}$

8)  $a^x = b^y = c^z$  에서 각 변에 10을 밑으로 하는 로그를 취하면,

$$x \log_{10} a = y \log_{10} b = z \log_{10} c = k \quad (k \neq 0)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\log_{10} a}{k}, \quad \frac{1}{y} = \frac{\log_{10} b}{k}, \quad \frac{1}{z} = \frac{\log_{10} c}{k}$$

$$\text{이것을 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \text{ 에 대입하면 } \frac{\log_{10} a}{k} + \frac{\log_{10} b}{k} = \frac{\log_{10} c}{k}$$

$$\log_{10} a + \log_{10} b = \log_{10} c, \quad \text{즉 } \log_{10} ab = \log_{10} c \quad \therefore ab = c$$

9)  $\log_a b + \log_b a = \frac{5}{2}$  에서  $\log_a b + \frac{1}{\log_a b} = \frac{5}{2}$  여기서  $\log_a b = X$  라 하면,

$$X + \frac{1}{X} = \frac{5}{2}, \quad 2X^2 - 5X + 2 = 0 \quad \therefore X = \frac{1}{2} \text{ 또는 } X = 2$$

$$\log_a b = \frac{1}{2} \text{ 에서 } b = a^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \frac{a^3 + b^3}{ab + a^2b^2} = \frac{a^3 + a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}} + a^3} = 1$$

$$\log_a b = 2 \text{ 에서 } b = a^2 \quad \therefore \frac{a^3 + b^3}{ab + a^2b^2} = \frac{a^3 + (a^2)^3}{a \cdot a^2 + a^2 \cdot a^4} = 1$$

10)  $\log_4 y = \frac{\log_2 y}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2 y, \quad \log_8 z = \frac{\log_2 z}{\log_2 8} = \frac{1}{3} \log_2 z$

$$\therefore \log_2 x + 2 \log_4 y + 3 \log_8 z = \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = \log_2 xyz = 1$$

$$\therefore xyz = 2 \text{ 따라서, } \{(2^x)^y\}^z = 2^{xyz} = 2^2 = 4$$

11) (1)  $x = 18^{10}$  으로 놓으면,

$$\begin{aligned} \log x &= \log 18^{10} = 10 \log 18 = 10(\log 2 + 2 \log 3) = 10(0.3010 + 2 \times 0.4771) \\ &= 10 \times 1.2552 = 12.552 \end{aligned}$$

따라서  $\log x$  의 지표가 12 이므로  $18^{10}$  은 13 자리의 수이다.

(2)  $x = 0.3^{10}$  으로 놓으면,

$$\log x = \log 0.3^{10} = 10 \log 0.3 = 10 \times \log \frac{3}{10} = 10 \times (-1 + 0.4771) = -10 + 4.771 = \bar{6}.771$$

따라서,  $\log x$  의 지표가 -6 이므로  $0.3^{10}$  은 소수 6번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

12) 상용로그의 지표가 4 인 자연수를  $A$ , 역수의 상용로그의 지표가  $\bar{2}$  인 자연수를  $B$  라 하면,

$$4 \leq \log A < 5 \text{ 에서 } 10^4 \leq A < 10^5 \quad \therefore x = 10^5 - 10^4 = 10^4(10 - 1) = 9 \cdot 10^4$$

$$-2 \leq \log \frac{1}{B} < -1 \text{ 에서 } -2 \leq -\log B < -1 \quad \text{즉, } 1 < \log B \leq 2 \text{ 이므로 } 10 < B \leq 10^2$$

$$\therefore y = 10^2 - 10 = 10(10 - 1) = 9 \cdot 10 \quad \therefore \log x - \log y = \log \frac{x}{y} = \log \frac{9 \cdot 10^4}{9 \cdot 10} = 3$$

13)  $1 \leq \log x < 2$  이고,  $\log x^2$  과  $\log \frac{1}{x}$  의 가수가 같으므로

$$\log x^2 - \log \frac{1}{x} = 2 \log x + \log x = 3 \log x \text{ 는 정수이다.}$$

따라서,  $3 \leq 3 \log x < 6$  이므로  $3 \log x = 3, 3 \log x = 4, 3 \log x = 5$  이다.

$$\therefore \log x = 1, \log x = \frac{4}{3}, \log x = \frac{5}{3} \text{ 에서}$$

$$x = 10, 10^{\sqrt[3]{10}}, 10^{\sqrt[3]{100}}$$

14)  $A, B$  가 세 자리의 정수이고,  $B$  의 상용로그의 가수가  $A$  의 상용로그의 가수의 2배이므로

$$\log A = 2 + a \left(0 \leq a < \frac{1}{2}\right) \dots\dots \textcircled{1}, \quad \log B = 2 + 2a \dots\dots \textcircled{2}$$

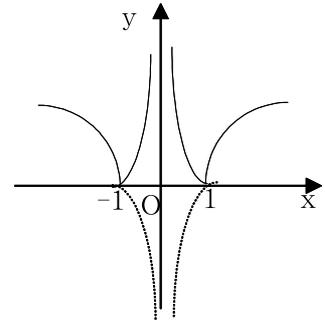
$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2}$  에서  $2\log A - \log B = 2, \log A^2 = \log 100B \quad \therefore A^2 = 100B$  에서  $A = 10\sqrt{B}$   
조건에서  $900 < B < 1000$  이므로  $30 < \sqrt{B} \leq 31$ , 그리고  $A$  가 정수이므로  $\sqrt{B}$  도 정수이다.

$$\therefore \sqrt{B} = 31, B = 31^2 = 961 \quad \text{또한} \quad A = 10\sqrt{B} = 310, \quad \therefore A = 310, b = 961$$

15)  $10^8 \leq x+y < 10^9, \quad 10^3 \leq xy < 10^4 \quad \therefore 10^4 < \frac{x+y}{xy} < 10^6$  즉,  $10^4 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < 10^6$

16)  $x = \frac{\sqrt{252} \times 26 \times 2.1}{5 \times 2.45 \times \sqrt[3]{23.2}}$  로 놓으면,

$$\log x = \frac{1}{2} \log 252 + \log 26 + \log 2.1 - \left( \log 5 + \log 2.45 + \frac{1}{3} \log 23.2 \right)$$



$$= \frac{1}{2} \times 2.4014 + 1.4150 + 0.3222 - \left\{ (1 - 0.3010) + 0.3892 + \frac{1}{3} \times 1.3655 \right\} = 1.3945$$

$$\log 2.48 = 0.3945, \quad \log 24.8 = 1.3945 \quad \therefore x = 24.8$$

17)  $y = |\log_2 x^2| = 2 |\log_2 |x||$

먼저  $y = 2 \log_2 |x|$  의 그래프를 그리고

이 그래프의  $x$  축 아랫부분을  $x$  축 위로 올린다.

답 : 정의역:  $\{x \mid x \neq 0 \text{ 인 실수}\}$ , 치역:  $\{y \mid y \geq 0\}$

점근선:  $x = 0$  ( $y$ 축)

18) (1)  $2^{x+1} > 0$  이므로  $y > -1$

$$y = 2^{x+1} - 1 \quad \text{에서} \quad y + 1 = 2^{x+1} \quad \therefore x + 1 = \log_2(y + 1), \quad x = \log_2(y + 1) + 1$$

$$x \text{ 와 } y \text{ 를 바꾸면, } y = \log_2(x + 1) - 1 \quad (x > -1)$$

(2)  $y = \frac{1}{2}(2^x - 2^{-x})$  에서  $2^x = t$  ( $t > 0$ ) 로 놓으면,  $y = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ , 즉  $2y = t - \frac{1}{t}$

$$\text{양변에 } t \text{ 를 곱하여 정리하면, } t^2 - 2yt - 1 = 0 \quad \therefore t = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\text{이 때, } t > 0 \text{ 이므로 } t = y + \sqrt{y^2 + 1}, \quad \text{즉 } 2^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\text{로그의 정의에서 } x = \log_2(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad x \text{ 와 } y \text{ 를 바꾸면, } y = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(3)  $x \geq 1$  이므로  $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1 \quad \therefore y \geq 0$

$$y = \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{에서} \quad 3^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \therefore 3^y - x = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{이것의 양변을 제곱하면, } 3^{2y} - 2 \cdot 3^y \cdot x + x^2 = x^2 - 1$$

$$\therefore 2 \cdot 3^y \cdot x = 3^{2y} + 1, \quad x = \frac{3^{2y} + 1}{2 \cdot 3^y} = \frac{1}{2}(3^y + 3^{-y})$$

$$x \text{ 와 } y \text{ 를 바꾸면, } y = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x}) \quad (x \geq 0)$$

19) 진수는 양의 실수이므로  $x > 0, y > 0$

$y=10-2x$  이고  $y>0$  이므로  $10-2x>0 \quad \therefore 0<x<5 \dots\dots \textcircled{1}$

$\log_{10}x + \log_{10}y = \log_{10}xy = \log_{10}x(10-2x)$  에서  $f(x) = x(10-2x)$  로 놓으면,

$$f(x) = -2x^2 + 10x = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$$

$\textcircled{1}$  의 범위에서  $\therefore 0 < f(x) \leq \frac{25}{2}$

$$\therefore \log_{10}f(x) \leq \log_{10}\frac{25}{2} = \log_{10}\frac{100}{8} = 2 - 3\log_{10}2$$

따라서, 최대값은  $2 - 3\log_{10}2$

20)  $a>1, b>1, c>1$  이므로  $\log_a b > 0, \log_b c > 0, \log_c a > 0$

$$\therefore p \geq 3 \sqrt[3]{(\log_a b)(2\log_b c)(4\log_c a)} = 3 \sqrt[3]{\frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{2\log c}{\log b} \cdot \frac{4\log a}{\log c}} = 3 \sqrt[3]{8} = 6$$

(단, 등호는  $\log_a b = 2\log_b c = 4\log_c a = 2$  일 때 성립)

따라서, 구하는 최소값은 6

21)  $1 < x < a < 2$  에서  $0 < \log_a x < 1 < \log_a 2$

$$\therefore (\log_a x)^2 < \log_a x < \log_a x^2 < \log_a 2x$$

22)  $\log x = X, \log y = Y$  로 놓으면  $X \geq 1, Y \geq 1, X + Y = 3$  에서

$$Y = -X + 3 \quad (1 \leq X \leq 2) \quad \therefore XY = X(-X + 3) = -\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \quad (1 \leq X \leq 2)$$

따라서, 최대값  $\frac{9}{4}$ , 최소값 2

23) (1) 진수 조건에서  $x > 0$  이고  $x-1 > 0 \quad \therefore x > 1$

$$\text{주어진 식을 정리하면, } \log_{10} x(x-1) = \log_{10} 20 \quad \therefore x(x-1) = 20$$

$$x^2 - x = 20, \quad (x-5)(x+4) = 0 \quad \text{그런데 } x > 1 \text{ 이므로 } x = 5$$

(2)  $(\log_3 27 + \log_3 x)(\log_3 3 + \log_3 x) = 3, \quad (3 + \log_3 x)(1 + \log_3 x) = 3$

$$\log_3 x = X \text{ 로 놓으면 } (3 + X)(1 + X) = 3, \quad X^2 + 4X = 0 \quad \therefore X = 0 \text{ 또는 } X = -4$$

$$X = 0 \text{ 일 때 } \log_3 x = 0 \quad \therefore x = 1$$

$$X = -4 \text{ 일 때 } \log_3 x = -4 \quad \therefore x = 3^{-4} = \frac{1}{81}$$

(3) 양변에 상용로그를 취하면  $(3 \log x) \log x = 2 + 5 \log x$

$$\log x = X \text{ 로 놓으면 } 3X^2 - 5X - 2 = 0, \quad (3X + 1)(X - 2) = 0$$

$$\therefore X = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } X = 2 \quad \therefore x = 10^{-\frac{1}{3}} \text{ 또는 } x = 100$$

(4) 진수 조건에서  $x > 0, y > 0$

주어진 방정식을 로그의 성질을 이용하여 고치면,

$$\begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 9 \\ 2 \log_2 x + \log_2 y = 13 \end{cases}$$

$\log_2 x = X, \log_2 y = Y$  로 치환하면

$$\begin{cases} X + 3Y = 9 \dots\dots\dots\textcircled{1} \\ 2X + Y = 13 \dots\dots\dots\textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \text{ 하면, } 5Y = 5 \text{ 즉 } Y = 1, X = 6$$

따라서  $\log_2 x = 6$  에서  $x = 64$ ,  $\log_2 y = 1$  에서  $y = 2$

(5) 주어진 방정식을 고치면

$$(\log y)^2 + 2(2^x + 2^{-x})\log y + 2(2^{2x} + 2^{-2x}) = 0 \quad \{\log y + (2^x + 2^{-x})\}^2 + (2^{+x} - 2^{-x})^2 = 0$$

$$\text{따라서 } \log y + (2^x + 2^{-x}) = 0, \quad 2^x - 2^{-x} = 0$$

$$\therefore x = 0, \quad y = \frac{1}{100}$$

24) 주어진 방정식을 고치면  $\log(4 - 2x^2) = \log 10(a - x)$

$$\therefore 4 - 2x^2 = 10(a - x), \quad x^2 - 5x + 5a - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$D = 25 - 4(5a - 2) \geq 0 \text{ 에서 } a \leq \frac{33}{20} \quad \therefore a = 1$$

$$\textcircled{1} \text{ 에서 } x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{그런 진수 조건 } 4 - 2x^2 > 0, \quad x < 1 \text{ 에서 } -\sqrt{2} < x < 1 \text{ 이므로 } x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

25)  $a^{\log x} = x^{\log a} = X$  로 놓으면,  $X^2 - 4X + 3 = 0$  에서  $X = 1$  또는  $X = 3$

$$a^{\log x} = 1 \text{ 또는 } x^{\log a} = 3 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3^{\frac{1}{\log a}}$$

26) (1) 양변에 상용로그를 취하면  $(\log x)(\log x) > 3 - 2\log x, \quad (\log x)^2 + 2\log x - 3 > 0$

$$(\log x + 3)(\log x - 1) > 0, \quad \log x < -3 \text{ 또는 } \log x > 1$$

$$\therefore x < \frac{1}{1000} \text{ 또는 } x > 10 \text{ 그런데 진수는 양수이므로 } x > 0$$

$$\text{따라서 구하는 해는 } 0 < x < \frac{1}{1000} \text{ 또는 } x > 10$$

(2)  $1 - x > 0, \quad 2x - 1 > 0$  에서  $\frac{1}{2} < x < 1 \quad \cdots \textcircled{1}$

$$\text{주어진 부등식을 고치면 } \log_{a^2} (1 - x)^2 \leq \log_{a^2} (2x - 1)$$

$$0 < a^2 < 1 \text{ 이므로 } (1 - x)^2 \geq 2x - 1, \quad x^2 - 4x + 2 \geq 0$$

$$\therefore x \leq 2 - \sqrt{2} \text{ 또는 } x \geq 2 + \sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } \frac{1}{2} < x \leq 2 - \sqrt{2}$$

27) 진수조건에서  $x - 1 > 0, \quad 2x - 1 > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \cdots \textcircled{1}$

$$\log_{\frac{1}{4}} (2x - 1) = \frac{\log_{\frac{1}{2}} (2x - 1)}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}} = \frac{\log_{\frac{1}{2}} (2x - 1)}{2} \text{ 이므로}$$

주어진 부등식의 양변에 2를 곱하면

$$2\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > \log_{\frac{1}{2}} (2x - 1), \quad \log_{\frac{1}{2}} (x - 1)^2 > \log_{\frac{1}{2}} (2x - 1)$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } (x - 1)^2 < 2x - 1 \quad \therefore x^2 - 4x + 2 < 0$$

$$\therefore 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } 1 < x < 2 + \sqrt{2}$$

